

Exercice 3 (6 points)

A) On donne dans l'annexe joint, la courbe (C) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) de la fonction f définie sur \mathbb{R} , par : $f(x) = e^x - 1$.

- 1) Montrer que la droite $\Delta : y = x$ est la tangente à (C) au point O (0,0).
- 2) Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle I que l'on précisera.
- 3) Tracer Δ et la courbe (C') de la fonction réciproque f^{-1} dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- 4) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout réel x de I.

B) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} , par : $g(x) = e^x - 1 + \frac{1}{e^x + 1}$ et (Γ) sa courbe représentative.

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ interpréter graphiquement ce résultat.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$.

2) a) Etudier le signe de $(f(x) - g(x))$ pour x réel, en déduire la position relative de (C) et (Γ) .

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x))$.

3) a) Montrer que pour tout réel x , $g'(x) = \frac{e^{2x}(e^x + 2)}{(e^x + 1)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de g .

c) Calculer $g(0)$ puis tracer (Γ) dans le repère \mathcal{R} .

4) a) Vérifier que pour tout réel x , $g(x) = e^x - \frac{e^x}{e^x + 1}$.

b) Soit \mathcal{A} l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe (Γ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Calculer \mathcal{A} .

Exercice 4 (5 points)

1) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $11x - 7y = 4$.

a) Vérifier que (1,1) est une solution de l'équation (E).

b) Résoudre l'équation (E).

2) Soit G l'ensemble des entiers relatifs n vérifiant : $n \equiv 2 [11]$ et $n \equiv 6 [7]$

a) Vérifier que 90 est un élément de G.

b) Soit n un élément de G, et (p, q) le couple d'entiers relatifs vérifiant

$$\begin{cases} n = 11p + 2 \\ n = 7q + 6 \end{cases}$$

Montrer que le couple (p, q) est une solution de (E).

c) En déduire que si n appartient à l'ensemble G alors $n \equiv 13 [77]$.

3) Montrer que si $n \equiv 13 [77]$ alors n est un élément de G.

4) Déterminer le plus petit élément de G supérieur à 2000.



Épreuve : MATHÉMATIQUES - Section Sciences de l'informatique (session de contrôle 2016)

Annexe (à rendre avec la copie)

