Correction de l'épreuve de mathématiques ($bac\ Sciences\ de\ l'informatique$) Session de contrôle 2017

Exercice 1 :

De quoi s'agit t-il ?

* **suites réelles, convergence**
* **suites géométriques, terme général**

1) a) $* \; n = 0 , \quad 0 < u_0 = \frac{1}{3} < 1$ donc $P(0)$ est vraie.

$*$ Supposons que pour n entier naturel donné, $P(n)$ est vraie (c'est à dire $0 < u_n < 1$)

Montrons que $P(n+1)$ est vraie (c'est à dire $0 < u_{n+1} < 1$)

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n} = \frac{2(1+u_n)-2}{1+u_n} = 2 - \frac{2}{1+u_n}$$

On a : $0 < u_n < 1 \Rightarrow 1 < 1 + u_n < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{1+u_n} < 1$

$\Rightarrow 0 < u_{n+1} = 2 - \frac{2}{1+u_n} < 1$

Donc l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \geq 0 , \quad 0 < u_n < 1$.

b) $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{1+u_n} - u_n = u_n\left(\frac{2}{1+u_n} - 1\right) = \frac{u_n}{1+u_n}(2 - 1 - u_n) = \frac{u_n}{1+u_n}(1 - u_n) > 0$.

Donc la suite (u_n) est croissante.

c) (u_n) est une suite croissante et majorée donc elle est convergente.

2) a) $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{\frac{2u_n}{1+u_n}}{1-\frac{2u_n}{1+u_n}} = \frac{2u_n}{1+u_n-2u_n} = \frac{2u_n}{1-u_n} = 2v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$.

b) $v_0 = \frac{u_0}{1-u_0} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$ puis $v_n = v_0 q^n = \frac{1}{2} \times 2^n = 2^{n-1}$

$v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$ sig $u_n = \dfrac{v_n}{1+v_n} = \dfrac{2^{n-1}}{1+2^{n-1}}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^{n-1}}{1+2^{n-1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{2^{n-1}}+1} = 1$.

<u>Exercice 2 :</u>

De quoi s'agit t-il ?

*** Calcul de probabilités d'évènements**

*** Probabilité conditionnelle, probabilité totale**

*** Loi binomiale**

1) $P(P) = 0{,}85$, $P(A) = 0{,}78$ et $P(P \cap A) = 0{,}75$

2) $P(A_1) = P(A/P) = \dfrac{P(A\cap P)}{P(P)} = \dfrac{15}{17}$

$P(A_2) = P(\bar{P} \cap A) = P(A) - P(P \cap A) = 0{,}78 - 0{,}75 = 0{,}03$

3) $n = 6$ et $p = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0{,}22$

Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de fois qu'il arrive en retard

X suit la loi binomiale de paramètres (n, p).

$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = C_6^0 \times 0{,}22^0 \times 0{,}78^6 + C_6^1 \times 0{,}22^1 \times 0{,}78^5 \approx 0{,}606$

<u>Exercice 3 :</u>

De quoi s'agit t-il ?

*** fonction en exponentielle**

*** Suite définie par une intégrale : Convergence et encadrement de la limite**

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\, e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \times \dfrac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$

La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

b) f est définie et continue sur et $[0, +\infty[$.

f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$ on a $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x} + \sqrt{x}(-e^{-x}) = \left(\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x}}\right) e^{-x}$

$f'(x) = 0$ sig $1 - 2x = 0$

sig $x = \dfrac{1}{2}$

$*$ si $0 < x < \frac{1}{2}$ alors $f'(x) > 0$

$*$ si $x > \frac{1}{2}$ alors $f'(x) < 0$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-x} = +\infty$

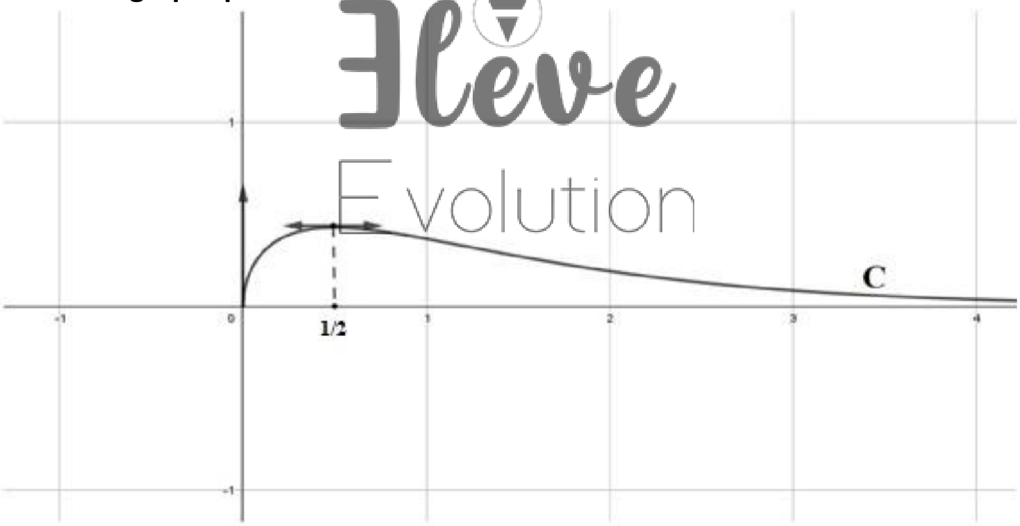
Donc f n'est pas dérivable à droite en 0 et $\mathscr{C}$ admet au point d'abscisse 0 une demi tangente verticale dirigée vers le haut.

2) a) Tableau de variations de f :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	0

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}43$

b) Représentation graphique :



3) a) $u_{n+1} - u_n = \int_0^{n+1} f(t)dt - \int_0^{n} f(t)dt = \int_n^{n+1} f(t)dt \geq 0$ car $n+1 > n$ et f positive sur $[0, +\infty[$.

donc (u_n) est croissante.

b) $t \geq 0$, $(t+2)^2 - 8t = t^2 + 4t + 4 - 8t = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 \geq 0$

sig $8t \leq (t+2)^2$

sig $\sqrt{8t} = 2\sqrt{2} \times \sqrt{t} \leq t + 2$

sig $\sqrt{t} \leq \frac{t+2}{2\sqrt{2}}$

c) On pose : $u(t) = t + 2 \to u'(t) = 1$ (Intégration par parties) $v'(t) = e^{-t} \to v(t) = - e^{-t}$

$$\int_0^n (t+2)\, e^{-t}dt = [-(t+2)\, e^{-t}]_0^n - \int_0^n - e^{-t}dt = [-(t+2)\, e^{-t}]_0^n + [-e^{-t}]_0^n = 3 - (n+3)\, e^{-}{}_n$$

d) $u_n = \int_0^n f(t)dt = \int_0^n \sqrt{t}\, e^{-t}dt \leq \int_0^n \frac{(t+2)}{2\sqrt{2}}\, e^{-t}dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^n (t+2)\, e^{-t}dt = \frac{3-(n+3)\, e^{-n}}{2\sqrt{2}} \leq \frac{3}{2\sqrt{2}}$

donc (u_n) est majorée.

(u_n) est une suite croissante et majorée donc elle est convergente.

Exercice 4 :

De quoi s'agit t-il ?

*** Arithmétique : Résolution d'équations dans Z x Z**

*** PGCD et PPCM**

*** Congruences**

1) a) $(E_1) : 5x - 7y = 3$, $5 \times 2 - 7 \times 1 = 10 - 7 = 3$

Donc $(x_0, y_0) = (2, 1)$ est une solution de (E_1).

b) $(x_0, y_0) = (2, 1)$ est une solution particulière de (E_1).

$5x - 7y = 3$ (1)

$5x_0 - 7y_0 = 3$ (2)

$(1) - (2) \Longrightarrow 5(x - x_0) = 7(y - y_0)$

$\Longrightarrow 7 / 5(x - x_0)$

$7 / 5(x - x_0)$ et $PGCD(7, 5) = 1$ d'ou d'aprés le lemme de Gauss $7 / x - x_0$

$\Longrightarrow x - x_0 = 7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow x = x_0 + 7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

d'autre part $5(x - x_0) = 7(y - y_0) \Longrightarrow 5 \times 7k = 7(y - y_0)$

$\Longrightarrow 5 \times k = y - y_0$

$\Longrightarrow y = y_0 + 5k$

Conclusion : $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(2 + 7k, 1 + 5k) /\ k \in \mathbb{Z}\}$

c) (a, b) solution de (E_1) sig $5a - 7b = 3$. On pose $d = a \wedge b \Longrightarrow d / a$ et d / b

$\Longrightarrow d /\ 5a - 7b = 3$

$\Longrightarrow d = 1$ ou $d = 3$

d) $d = 1$, $(2, 1)$ solution de (E_1) avec $2 \wedge 1 = 1$ $d = 3$, $(9, 6)$ solution de (E_1) avec $9 \wedge 6 = 3$

2) a) $(E_2) : 5x^2 - 7y^2 = 3$

On pose $x = 3k$ et $y = 3k'$ avec $k, k' \in \mathbb{Z}$. donc $5x^2 - 7y^2 = 9(5k^2 - 7k'^2) = 3$ implique $9 / 3$ impossible.

b) (x, y) est solution de (E_2) sig $5x^2 - 7y^2 = 3$

or $5 \equiv 2\ [3]$ et $7 \equiv 1\ [3]$ donc $5x^2 - 7y^2 \equiv 3\ [3] \Longrightarrow 2x^2 \equiv y^2\ [3]$

c) si $z \equiv 1\ [3]$ alors $z^2 \equiv 1\ [3]$

si $z \equiv 2\ [3]$ alors $z^2 \equiv 1\ [3]$

d) (x, y) est solution de $(E_2) \Longrightarrow$ x et y ne sont pas des multiples de 3.

$\Longrightarrow x \equiv 1$ ou $2\ [3]$ et $y \equiv 1$ ou $2\ [3]$

$\Longrightarrow 2x^2 \not\equiv y^2\ [3]$

Donc (E_2) n'a pas de solutions dans ZxZ.