RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2019	**Session principale**	
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**
	Durée : **4h**	Coefficient de l'épreuve : **4**

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

La page 4 / 4 est à rendre avec la copie

Exercice 1 : (5 points)

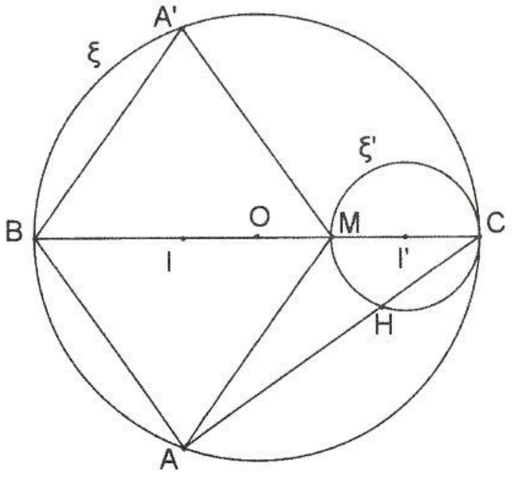
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Dans la figure ci-dessous,

ξ est le cercle de centre O et de diamètre $[BC]$, M est le point de $[BC]$ tel que $CM = \frac{1}{3}BC$

et ξ' est le cercle de diamètre $[CM]$. I et I' sont les milieux respectifs des segments $[BM]$ et $[CM]$.

A et A' sont deux points du cercle ξ tels que AMA'B est un losange et $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

La droite (AC) recoupe le cercle ξ' en H.



1) a) Montrer que les droites (AB) et (HM) sont parallèles.
   b) En déduire que les points H, M et A' sont alignés.
   c) Montrer que $HM = \frac{1}{3}AB$ et que $HA^2 = AB^2 - HM^2$.
2) On désigne par S la similitude directe de centre H qui envoie A en M.
   a) Préciser l'angle de S et montrer que son rapport est égal à $\frac{\sqrt{2}}{4}$.
   b) Déterminer les images par S des droites (AI) et (MH). En déduire $S(A')$.
3) Montrer que $S(I) = I'$ et en déduire que (HI) est tangente en H au cercle ξ'.
4) On pose $S' = S_{(AH)} \circ S \circ S_{(AH)}$.
   a) Vérifier que S' est une similitude directe dont on précisera le centre et le rapport.
   b) La droite (A'M) recoupe le cercle ξ en N. Montrer que le triangle MCN est isocèle de sommet principal C.
   c) Déterminer $S'(A)$. En déduire alors l'angle de S'.

Exercice 2 : (4 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points A(2,0,1), B(-2,0,1), C(1,1,1) et D(-4,0,-1).

1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b) On désigne par P le plan (ABC). Montrer que P est d'équation z = 1.
2) Soit S l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 1 = 0$.
   a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le rayon et les coordonnées du centre Ω.
   b) Soit le point I(0, 0, 1), montrer que S et P se coupent suivant le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 2.
3) Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $\Omega_\lambda(0, 0, \lambda)$ et $R_\lambda = \sqrt{(\lambda - 1)^2 + 4}$.
   a) Montrer que la sphère S_λ de centre Ω_λ et de rayon R_λ coupe P suivant le cercle $\mathscr{C}$.
   b) Déterminer λ_0 pour que $D \in S_{\lambda_0}$.
   c) Déterminer les homothéties de l'espace transformant S en S_{λ_0}.

Exercice 3 : (5 points)

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : 29 x - 13y = 6.
   a) Vérifier que (2,4) est une solution de (E).
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

Soit dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E') : $x^{19} \equiv -2\ [29]$.

2) Justifier que $2^{28} \equiv 1\ [29]$ et en déduire que – 8 est solution de (E').
3) Soit x_0 une solution de (E').
   a) Montrer que x_0 n'est pas un multiple de 29 et en déduire alors que $x_0^{28} \equiv 1\ [29]$.
   b) Montrer que $x_0^{57} \equiv -8\ [29]$ puis que $x_0 \equiv -8\ [29]$.
   c) En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E').
   d) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(x - 3)^{19} \equiv -2\ [29]$.
4) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} (x-3)^{19} \equiv -2\ [29], \\ (x-3)^{13} \equiv -2\ [13]. \end{cases}$

Exercice 4 : (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{1-e^{-x}}$.

1) a) Montrer que f possède une fonction réciproque g définie sur [0, 1[.

b) Montrer que pour tout $x\in[0,1[$; $g(x)=-\ln(1-x^2)$.

c) Montrer que l'équation g(x) = x admet une solution α sur [0,7 ; 0,8].

d) On donne en annexe la représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction f dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, la première bissectrice Δ et le point $A(\alpha,\alpha)$.

On désigne par $\mathscr{C}'$ la courbe de g. Tracer $\mathscr{C}'$ dans le même repère.

2) Soit φ la fonction définie sur [0, 1[par $\varphi(x)=\int_0^{g(x)} f(t)\,dt$.

a) Montrer que φ est dérivable sur [0, 1[et que $\varphi'(x)=\frac{2x^2}{1-x^2}$.

b) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x appartenant à [0, 1[, $\frac{2x^2}{1-x^2}=a+\frac{b}{1+x}+\frac{c}{1-x}$.

c) En déduire que $\varphi(x)=-2x+\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $x\in[0,1[$.

d) On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire de la région du plan située entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations respectives x = 0 et x = α.

Montrer que $\mathscr{A}=2\left(\varphi(\alpha)-\frac{\alpha^2}{2}\right)$.

3) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k.3^k}$.

Soit $n\geq 1$. On pose pour tout $t\in[0,1[$, $S_n(t)=2\sum_{k=1}^{n}t^{2k-1}$.

a) Montrer que $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} S_n(t)\,dt=u_n$.

b) Montrer que pour tout $t\in[0,1[$, $S_n(t)=(1-t^{2n})\,g'(t)$, où g' est la dérivée de la fonction g sur [0, 1[.

c) Montrer que pour tout $0\leq t\leq\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\left(1-\frac{1}{3^n}\right)g'(t)\leq S_n(t)\leq g'(t)$.

d) En déduire que $\left(1-\frac{1}{3^n}\right)g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\leq u_n\leq g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

4) Montrer alors que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve : Mathématiques - Section : Mathématiques - Session principale (2019)

Annexe à rendre avec la copie